

№26 Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежат две кучи камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может **добавить один камень** в одну из куч и **два камня** в другую или же **увеличить** количество камней **в любой куче в два раза**. Например, пусть в одной куче 6 камней, а в другой 8 камней; такую позицию мы будем обозначать (6, 8). За один ход из позиции (6, 8) можно получить любую из четырёх позиций: (7, 10), (8, 9), (12, 8), (6, 16). Чтобы делать ходы, у каждого игрока есть неограниченное количество камней.

Игра завершается в тот момент, когда суммарное количество камней в кучах становится **не менее 41**. Победителем считается игрок, сделавший последний ход, то есть первым получивший позицию, в которой в кучах будет 41 или больше камней.

В начальный момент в первой куче было **8 камней**, во второй куче – S камней, $1 \leq S \leq 32$.

Будем говорить, что игрок имеет *выигрышную стратегию*, если он может выиграть при любых ходах противника. Описать стратегию игрока – значит описать, какой ход он должен сделать в любой ситуации, которая ему может встретиться при различной игре противника. В описание выигрышной стратегии не следует включать ходы играющего по ней игрока, которые не являются для него безусловно выигрышными, то есть не гарантируют выигрыш независимо от игры противника.

Выполните следующие задания.

Задание 1.

- а) Назовите все значения S , при которых Петя может выиграть первым ходом.
- б) Петя сделал неудачный первый ход, после которого Ваня выиграл своим первым ходом. Назовите минимальное значение S , при котором это возможно.

Задание 2.

Укажите максимальное значение S , при котором Петя не может выиграть первым ходом, но у Пети есть выигрышная стратегия, следуя которой, он может выиграть своим вторым ходом независимо от того, как будет ходить Ваня. Для указанного значения S опишите выигрышную стратегию Пети.

Задание 3.

Проанализируйте игру при $S = 11$. У кого из игроков в этом случае есть выигрышная стратегия? Опишите эту стратегию и постройте дерево всех партий, возможных при этой выигрышной стратегии, в виде рисунка или таблицы. В узлах дерева указывайте игровые позиции. Дерево не должно содержать партий, невозможных при реализации выигрывающим игроком своей выигрышной стратегии. Например, полное дерево игры не будет верным ответом на это задание.

Спойлеры!

Задание 1.

- а) Назовите все значения S , при которых Петя может выиграть первым ходом.
- б) Петя сделал неудачный первый ход, после которого Ваня выиграл своим первым ходом. Назовите минимальное значение S , при котором это возможно.

Задание 1.

- а) Петя может выиграть первым ходом, если $S = 17, \dots, 32$. Для выигрыша достаточно удвоить количество камней во второй куче. При меньших значениях S за один ход нельзя получить 41 или более камней в двух кучах.

б) Такая ситуация возможна при $S = 9$. Если Петя удвоит первую кучу, получится позиция (16, 9), из которой Ваня может получить позицию (32, 9) и выиграть. При $S < 9$ никакой первый ход Пети не создаст ситуацию, в которой Ваня может сразу выиграть.

Задание 1 выполнено, если выполнены оба пункта: для пункта (а) перечислены все удовлетворяющие условию значения S , и только они, для пункта (б) указано верное значение S , и только оно. Обоснование найденных значений не обязательно. (Из критериев оценивания)

Задание 2.

Укажите максимальное значение S , при котором Петя не может выиграть первым ходом, но у Пети есть выигрышная стратегия, следуя которой, он может выиграть своим вторым ходом независимо от того, как будет ходить Ваня. Для указанного значения S опишите выигрышную стратегию Пети.

Задание 2.

Петя не может выиграть первым ходом, но может выиграть вторым ходом при $S = 14$. Для победы Пете нужно сделать ход (10, 15). После хода Вани возникнет одна из позиций (11, 17), (12, 16), (20, 15), (10, 30). В любой из перечисленных позиций Петя может выиграть, удвоив количество камней во второй куче.

Значение $S = 14$ максимально, так как при $S = 15$ и $S = 16$ после любого хода Пети Ваня может выиграть следующим ходом, а при $S \geq 17$ Петя может выиграть первым ходом.

Задание 2 выполнено, если верно указано значение S и описана соответствующая стратегия.

Во всех случаях стратегии могут быть описаны так, как это сделано в примере решения, или другим способом

Задание 3.

Проанализируйте игру при $S = 11$. У кого из игроков в этом случае есть выигрышная стратегия? Опишите эту стратегию и постройте дерево всех партий, возможных при этой выигрышной стратегии, в виде рисунка или таблицы. В узлах дерева указывайте игровые позиции. Дерево не должно содержать партий, невозможных при реализации выигрывающим игроком своей выигрышной стратегии. Например, полное дерево игры не будет верным ответом на это задание.

Задание 3.

Выигрышная стратегия есть у Вани. После первого хода Пети возможны позиции (16, 11), (8, 22), (10, 12), (9, 13). В позициях (16, 11) и (8, 22) Ваня может выиграть первым ходом, удвоив количество камней в большей куче. Из позиций (10, 12) и (9, 13) Ваня может получить позицию (11, 14). После второго хода Пети получится одна из позиций (22, 14), (11, 28), (12, 16), (13, 15), в любой из них Ваня может удвоить количество камней в большей куче и выиграть.

В таблице изображены возможные партии при описанной стратегии Вани.
Заключительные позиции (в них выигрывает Ваня) выделены жирным шрифтом. На рисунке эти же партии показаны в виде графа (оба способа изображения допустимы)
Задание 3 выполнено, если правильно указан победитель (Ваня) и построено дерево всех возможных при выигрышной стратегии партий (и только их).
Дерево или таблицу постройте самостоятельно.

Вариант 2

Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежат две кучи камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может **добавить один камень** в одну из куч и **два камня** в другую или же **увеличить** количество камней **в любой куче в два раза**. Например, пусть в одной куче 6 камней, а в другой 8 камней; такую позицию мы будем обозначать (6, 8). За один ход из позиции (6, 8) можно получить любую из четырёх позиций: (7, 10), (8, 9), (12, 8), (6, 16). Чтобы делать ходы, у каждого игрока есть неограниченное количество камней.

Игра завершается в тот момент, когда суммарное количество камней в кучах становится не менее 47. Победителем считается игрок, сделавший последний ход, то есть первым получивший позицию, в которой в кучах будет 47 или больше камней.

В начальный момент в первой куче было 10 камней, во второй куче – S камней, $1 \leq S \leq 36$.

Будем говорить, что игрок имеет *выигрышную стратегию*, если он может выиграть при любых ходах противника. Описать стратегию игрока – значит описать, какой ход он должен сделать в любой ситуации, которая ему может встретиться при различной игре противника. В описание выигрышной стратегии не следует включать ходы играющего по ней игрока, которые не являются для него безусловно выигрышными, то есть не гарантируют выигрыш независимо от игры противника.

Выполните следующие задания.

Задание 1.

а) Назовите все значения S , при которых Петя может выиграть первым ходом.

б) Петя сделал неудачный первый ход, после которого Ваня выиграл своим первым ходом. Назовите минимальное значение S , при котором это возможно.

Задание 2.

Укажите максимальное значение S , при котором Петя не может выиграть первым ходом, но у Пети есть выигрышная стратегия, следуя которой, он может выиграть своим вторым ходом независимо от того, как будет ходить Ваня. Для указанного значения S опишите выигрышную стратегию Пети.

Задание 3.

Проанализируйте игру при $S = 13$. У кого из игроков в этом случае есть выигрышная стратегия? Опишите эту стратегию и постройте дерево всех партий, возможных при этой выигрышной стратегии, в виде рисунка или таблицы. В узлах дерева указывайте игровые позиции. Дерево не должно содержать партий, невозможных при реализации выигрывающим игроком. Например, полное дерево игры не будет верным ответом на это задание.