

Рекомендуемые задания для подготовки к ЕГЭ по математике.

1. Текстовые задачи.

1. Первый час автомобиль ехал со скоростью 115 км/ч, следующие три часа — со скоростью 45 км/ч, а затем два часа — со скоростью 40 км/ч. Найдите среднюю скорость автомобиля на протяжении всего пути. Ответ дайте в км/ч.
2. Изюм получается в процессе сушки винограда. Сколько килограммов винограда потребуется для получения 14 килограммов изюма, если виноград содержит 90% воды, а изюм содержит 5% воды?
3. Смешав 24-процентный и 67-процентный растворы кислоты и добавив 10 кг чистой воды, получили 41-процентный раствор кислоты. Если бы вместо 10 кг воды добавили 10 кг 50-процентного раствора той же кислоты, то получили бы 45-процентный раствор кислоты. Сколько килограммов 24-процентного раствора использовали для получения смеси?
4. От пристани A к пристани B , расстояние между которыми равно 192 км, отправился с постоянной скоростью первый теплоход, а через 4 часа после этого следом за ним со скоростью на 4 км/ч большей, отправился второй. Найдите скорость первого теплохода, если в пункт B оба теплохода прибыли одновременно. Ответ дайте в км/ч.
5. Велосипедист выехал с постоянной скоростью из города A в город B , расстояние между которыми равно 180 км. На следующий день он отправился обратно в A со скоростью на 8 км/ч больше прежней. По дороге он сделал остановку на 8 часов. В результате велосипедист затратил на обратный путь столько же времени, сколько на путь из A в B . Найдите скорость велосипедиста на пути из B в A . Ответ дайте в км/ч.
6. Семь одинаковых рубашек дешевле куртки на 2%. На сколько процентов десять таких же рубашек дороже куртки?
7. Илья и Слава выполняют одинаковый тест. Илья отвечает за час на 16 вопросов текста, а Слава — на 20. Они одновременно начали отвечать на вопросы теста, и Илья закончил свой тест позже Славы на 33 минуты. Сколько вопросов содержит тест?
8. Два гонщика участвуют в гонках. Им предстоит проехать 99 кругов по кольцевой трассе протяжённостью 4 км. Оба гонщика стартовали одновременно, а на финиш первый пришёл раньше второго на 22 минуты. Чему равнялась средняя скорость второго гонщика, если известно, что первый гонщик в первый раз обогнал второго на круг через 20 минут? Ответ дайте в км/ч.
9. Имеются два сосуда. Первый содержит 30 кг, а второй — 15 кг раствора кислоты различной концентрации. Если эти растворы смешать, то получится раствор, содержащий 34% кислоты. Если же смешать равные массы этих растворов, то получится раствор, содержащий 46% кислоты. Сколько килограммов кислоты содержится в первом сосуде?
10. Первый насос наполняет бак за 20 минут, второй — за 30 минут, а третий — за 1 час. За сколько минут наполнят бак три насоса, работая одновременно?
11. На изготовление 588 деталей первый рабочий затрачивает на 7 часов меньше, чем второй рабочий на изготовление 672 деталей. Известно, что первый рабочий за час делает на 4 детали больше, чем второй. Сколько деталей в час делает первый рабочий?
12. Бизнесмен Коржов получил в 2000 году прибыль в размере 1 400 000 рублей. Каждый следующий год его прибыль увеличивалась на 20% по сравнению с предыдущим годом. Сколько рублей составила прибыль Коржова за 2004 год?
13. Теплоход проходит по течению реки до пункта назначения 513 км и после стоянки возвращается в пункт отправления. Найдите скорость теплохода в неподвижной воде, если скорость течения равна 4 км/ч, стоянка длится 8 часов, а в пункт отправления теплоход возвращается через 54 часа после отплытия из него. Ответ дайте в км/ч.
14. Имеется два сплава. Первый содержит 10% никеля, второй — 30% никеля. Из этих двух сплавов получили третий сплав массой 200 кг, содержащий 25% никеля. На сколько килограммов масса первого сплава была меньше массы второго?
15. Из городов A и B , расстояние между которыми равно 300 км, навстречу друг другу одновременно выехали два автомобиля и встретились через 2 часа на расстоянии 180 км от города B . Найдите скорость автомобиля, выехавшего из города A . Ответ дайте в км/ч.
16. Заказ на 380 деталей первый рабочий выполняет на 1 час быстрее, чем второй. Сколько деталей за час изготавливает первый рабочий, если известно, что он за час изготавливает на 1 деталь больше второго?
17. От пристани A к пристани B , расстояние между которыми равно 110 км, отправился с постоянной скоростью первый теплоход, а через 1 час после этого следом за ним со скоростью на 1 км/ч большей отправился второй. Найдите скорость второго теплохода, если в пункт B он прибыл одновременно с первым. Ответ дайте в км/ч.

18. Катер в 11:00 вышел из пункта A в пункт B , расположенный в 30 км от A . Пробыв в пункте B 2 часа 40 минут, катер отправился назад и вернулся в пункт A в 19:00 того же дня. Определите (в км/ч) собственную скорость катера, если известно, что скорость течения реки 3 км/ч.

19. Путешественник переплыл море на яхте со средней скоростью 20 км/ч. Обратно он летел на спортивном самолете со скоростью 480 км/ч. Найдите среднюю скорость путешественника на протяжении всего пути. Ответ дайте в км/ч.

20. На изготовление 486 деталей первый рабочий затрачивает на 9 часов меньше, чем второй рабочий на изготовление 621 детали. Известно, что первый рабочий за час делает на 4 детали больше, чем второй. Сколько деталей в час делает первый рабочий?

2. Тригонометрические уравнения.

21.

а) Решите уравнение $\operatorname{ctg} x + \cos\left(\frac{\pi}{2} + 2x\right) = 0$.

б) Укажите корни уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-\frac{\pi}{2}; \pi\right]$.

22.

Решите уравнение: $(\cos x - 1)(\operatorname{tg} x + \sqrt{3})\sqrt{\cos x} = 0$.

23.

Решите уравнение $\left(\sin x - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \cdot \sqrt{3x^2 - 7x + 4} = 0$.

24.

а) Решите уравнение $2 \sin\left(\frac{7\pi}{2} + x\right) \cdot \sin x = \sqrt{3} \cos x$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $[-7\pi, -6\pi]$.

25.

а) Решите уравнение $2 \sin 2x + 2\sqrt{3} \sin x = 2 \cos x + \sqrt{3}$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\pi; \frac{\pi}{2}\right]$.

26.

а) Решите уравнение $2 \sin 2x = 4 \cos x - \sin x + 1$.

б) Укажите корни уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$.

27.

а) Решите уравнение $\cos 2x - \sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + 1 = 0$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-4\pi; -\frac{5\pi}{2}\right]$.

28.

а) Решите уравнение $2 \sin^2\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = \cos x$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-\frac{3\pi}{2}, 0\right]$.

29. а) Решите уравнение $\sqrt{3} \cos 2x = 3 - 3(\sin x + \cos x)^2$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-\pi, \frac{\pi}{2}\right]$.

30.

а) Решите уравнение $2 \sin^2 x = 3\sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + 4.$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\pi; \frac{5\pi}{2}\right].$

31.

а) Решите уравнение $2 \sin^2\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) = \sqrt{3} \cos x.$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-\frac{7\pi}{2}, -2\pi\right].$

32.

а) Решите уравнение $2 \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \operatorname{tg} x.$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-2\pi; -\frac{\pi}{2}\right].$

3. Стереометрия

33. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ сторона основания равна 12, а боковое ребро AA_1 равно $3\sqrt{6}$. На рёбрах AB и B_1C_1 отмечены точки K и L , соответственно, причём $AK = 2$; $B_1L = 4$. Точка M — середина ребра A_1C_1 . Плоскость γ параллельна прямой AC и содержит точки K и L .

- а) Докажите, что прямая BM перпендикулярна плоскости γ .
б) Найдите расстояние от точки C до плоскости γ .

34. В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ боковое ребро SA равно $\sqrt{5}$, а высота SH пирамиды равна $\sqrt{3}$. Точки M и N — середины рёбер CD и AB , соответственно, а NT — высота пирамиды с вершиной N и основанием SCD .

- а) Докажите, что точка T является серединой SM .
б) Найдите расстояние между NT и SC .

35. В основании пирамиды $SABCD$ лежит прямоугольник $ABCD$ со стороной $AB = 5$ и диагональю $BD = 9$. Все боковые рёбра пирамиды равны 5. На диагонали BD основания $ABCD$ отмечена точка E , а на ребре AS — точка F так, что $SF = BE = 4$.

- а) Докажите, что плоскость CEF параллельна ребру SB .
б) Плоскость CEF пересекает ребро SD в точке Q . Найдите расстояние от точки Q до плоскости ABC .

36. В основании четырёхугольной пирамиды $SABCD$ лежит прямоугольник $ABCD$ со сторонами $AB = 8$ и $BC = 6$. Длины боковых рёбер пирамиды $SA = \sqrt{21}$, $SB = \sqrt{85}$, $SD = \sqrt{57}$.

- а) Докажите, что SA — высота пирамиды.
б) Найдите угол между прямыми SC и BD .

37. В кубе $ABCA_1B_1C_1D_1$ все рёбра равны 4. На его ребре BB_1 отмечена точка K так, что $KB = 3$. Через точки K и C_1 построена плоскость α , параллельная прямой BD_1 .

- а) Докажите, что $A_1P : PB_1 = 2 : 1$, где P — точка пересечения плоскости α с ребром A_1B_1 .
б) Найдите угол наклона плоскости α к плоскости грани BB_1C_1C .

38. На ребре AA_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCA_1B_1C_1D_1$ взята точка E так, что $A_1E = 6EA$. Точка T — середина ребра B_1C_1 . Известно, что $AB = 4\sqrt{2}$, $AD = 12$, $AA_1 = 14$.

- а) Докажите, что плоскость ETD_1 делит ребро BB_1 в отношении 4 : 3.
б) Найдите площадь сечения параллелепипеда плоскостью ETD_1 .

5. Планиметрия.

39.

В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом C известны стороны $AC = 15$, $BC = 8$. Окружность радиуса 2,5 с центром O на стороне BC проходит через вершину C . Вторая окружность касается катета AC , гипотенузы треугольника, а также внешним образом касается первой окружности.

- а) Докажите, что радиус второй окружности меньше, чем $\frac{1}{4}$ длины катета AC .
 б) Найдите радиус второй окружности.
- 40.**
 Дан четырёхугольник $ABCD$.
 а) Докажите, что отрезки LN и KM , соединяющие середины его противоположных сторон, делят друг друга пополам.
 б) Найдите площадь четырёхугольника $ABCD$, если $LM = \sqrt{3}$, $KM = 2\sqrt{3}$, $\angle KML = 60^\circ$.
- 41.**
 На сторонах AD и BC параллелограмма $ABCD$ взяты соответственно точки M и N , причём M — середина AD , а $BN : NC = 1 : 3$.
 а) Докажите, что прямые AN и AC делят отрезок BM на три равные части.
 б) Найдите площадь четырёхугольника, вершины которого находятся в точках C , N и точках пересечения прямой BM с прямыми AN и AC , если площадь параллелограмма $ABCD$ равна 27.
- 42.**
 Отрезок, соединяющий середины M и N оснований BC и AD соответственно трапеции $ABCD$, разбивает её на две трапеции, в каждую из которых можно вписать окружность.
 а) Докажите, что трапеция $ABCD$ равнобедренная.
 б) Известно, что радиус этих окружностей равен 3, а меньшее основание BC исходной трапеции равно 10. Найдите радиус окружности, касающейся боковой стороны AB , основания AN трапеции $ABMN$ и вписанной в неё окружности.
- 43.**
 Окружность, вписанная в треугольник ABC , касается сторон AB , BC и CA в точках K , M и N соответственно.

$$AN = \frac{AB + AC - BC}{2}.$$
 а) Докажите, что
 б) Найдите отношение $AK : KB$, если известно, что $AN : NC = 4 : 3$ и $\angle BAC = 60^\circ$.
- 44.**
 Биссектриса угла ADC параллелограмма $ABCD$ пересекает прямую AB в точке E . В треугольник ADE вписана окружность, касающаяся стороны AE в точке K и стороны AD в точке T .
 а) Докажите, что прямые KT и DE параллельны.
 б) Найдите угол BAD , если известно, что $AD = 8$ и $KT = 4$.
- 45.**
 Около равнобедренного треугольника ABC с основанием BC описана окружность. Через точку C провели прямую, параллельную стороне AB . Касательная к окружности, проведённая в точке B , пересекает эту прямую в точке K .
 а) Докажите, что треугольник BCK — равнобедренный.
 б) Найдите отношение площади треугольника ABC к площади треугольника BCK , если $\cos \angle BAC = \frac{3}{4}$.
- 46.**
 В треугольнике ABC проведены высоты AK и CM . На них из точек M и K опущены перпендикуляры ME и KH соответственно.
 а) Докажите, что прямые EH и AC параллельны;
 б) Найдите отношение $EH : AC$, если угол ABC равен 30° .
- 47.**
 Точка M — середина стороны AD параллелограмма $ABCD$. Из вершины A проведены два луча, которые разбивают отрезок BM на три равные части.
 а) Докажите, что один из лучей содержит диагональ параллелограмма.
 б) Найдите площадь четырёхугольника, ограниченного двумя проведёнными лучами и прямыми BD и BC , если площадь параллелограмма $ABCD$ равна 120.
- 48.**
 В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AK и CM . На них из точек M и K опущены перпендикуляры ME и KH соответственно.
 а) Докажите, что прямые EH и AC параллельны.
 б) Найдите отношение EH и AC , если $\angle ABC = 45^\circ$.